

Ciągi. Trygonometria. Planimetria.

Zagadnienia szczegółowe: wyznaczanie wyrazów ciągu; wzór na n -ty wyraz ciągu oraz na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego; średnia arytmetyczna i geometryczna; definicja i własności funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych i rozwartych; zależności między funkcjami trygonometrycznymi; wyznaczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych na podstawie wartości jednej z nich np. sinus; kąt środkowy i wpisany; wykorzystanie funkcji trygonometrycznych w obliczeniach geometrycznych.

1. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_1 = -5$, $a_2 = -8$. Wyznacz a_5 , a_{10} , a_{13} .
2. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}$. Wyznacz a_5 , a_{10} , a_{13} .
3. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_2 = \frac{1}{3}$. Wyznacz a_5 , a_{10} , a_{13} .
4. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_1 = -5$, $a_2 = 5\sqrt{2}$. Wyznacz a_5 , a_{10} , a_{13} .
5. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_1 = -\sqrt{3}$, $a_2 = 3$. Wyznacz a_5 , a_{10} , a_{13} .
6. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_1 = 2\sqrt{2}$, $a_2 = 8$. Wyznacz a_5 , a_{10} , a_{13} .
7. Wyznacz iloraz oraz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, jeśli $a_6 = 32$, $a_8 = 128$.
8. W dziewięciowyrazowym ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich pierwszy wyraz jest równy 2, a ostatni jest równy 18. Wyznacz piąty wyraz tego ciągu.
9. W sześciowyrazowym ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich drugi wyraz jest równy 5, a ostatni jest równy 160. Wyznacz piąty i jedenasty wyraz tego ciągu.
10. Wyznacz ciąg arytmetyczny, jeśli $a_7 = 15$ oraz $a_{15} = 19$. Podaj wzór ogólny.
11. Wyznacz ciąg arytmetyczny, jeśli $a_8 = -12$ oraz $a_{20} = -8$. Podaj wzór ogólny.
12. Wyznacz ciąg geometryczny, jeśli $a_6 = 4$ oraz $a_{11} = \frac{1}{8}$.
13. Wyznacz ciąg geometryczny, jeśli $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $a_{10} = 8$.
14. Wyznacz iloraz oraz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, jeśli $a_8 = 64$, $a_{11} = 512$.
15. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{25-5n}{n}$. Wyznacz liczbę wszystkich całkowitych wyrazów tego ciągu.
16. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{48-6n}{n}$. Wyznacz liczbę wszystkich całkowitych nieujemnych wyrazów tego ciągu.
17. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{36-4n}{n}$. Wyznacz liczbę wszystkich całkowitych ujemnych wyrazów tego ciągu.
18. Ciąg a_n jest określony wzorem $a_n = \frac{1}{2}n - 12$. Wyznacz liczbę ujemnych wyrazów tego ciągu.
19. Ciąg a_n jest określony wzorem $a_n = -\frac{2}{3}n + 16$. Wyznacz liczbę dodatnich wyrazów tego ciągu.
20. Ciąg a_n jest określony wzorem $a_n = -\frac{5}{2}n + 8\frac{1}{2}$. Wyznacz liczbę niedodatnich wyrazów tego ciągu.
21. Ciąg a_n jest określony wzorem $a_n = (n+7)(n-4)$. Wyznacz liczbę ujemnych wyrazów tego ciągu.
22. Ciąg a_n jest określony wzorem $a_n = -(n-7,7)(n+4,6)$. Wyznacz liczbę dodatnich wyrazów tego ciągu.
23. Ciąg a_n jest określony wzorem $a_n = 2n^2 - 32$. Wyznacz liczbę niedodatnich wyrazów tego ciągu.
24. Ciąg a_n jest określony wzorem $a_n = \frac{1}{2}n^2 - 9\frac{1}{2}n + 30$. Które wyrazy tego ciągu są równe zeru?
25. Wyznacz ujemne wyrazy ciągu $a_n = n^2 - 18n + 77$.
26. Wyznacz ujemne wyrazy ciągu $a_n = 4n^2 - 100n + 600$.
27. Trójkąt T_1 równoboczny ma bok długości a . Kolejne trójkąty T_2, T_3, \dots są takie, że kolejny trójkąt ma bok trzy razy mniejszy od boku poprzedniego trójkąta. Wyznacz obwód trójkąta T_9 .
28. Pierwszy kwadrat ma bok długości 20cm. Każdy następny ma bok o 3cm dłuższy. Ostatni kwadrat ma bok długości 56cm. Ile jest kwadratów?
29. Ciąg $(27; 18; x+5)$ jest arytmetyczny. Wyznacz x .
30. Ciąg $(2x; 17; 3x-15)$ jest arytmetyczny. Wyznacz x .
31. Ciąg $(x^2 + 1; x + 4; 11)$ jest arytmetyczny. Wyznacz x .
32. Ciąg $(15; -x; -x^2)$ jest arytmetyczny. Wyznacz x .
33. Ciąg $(x; 12; 48)$ jest geometryczny. Wyznacz x .
34. Ciąg $(x; 4x; 48)$ jest geometryczny. Wyznacz x .

35. Ciąg $(x-7; -10; -16-2x)$ jest geometryczny. Wyznacz x .
36. Ciąg $(2-x; x+4; -27)$ jest geometryczny. Wyznacz x .
37. Ciąg $(2-x; -6; -12)$ jest geometryczny. Wyznacz x .
38. Dla jakiej wartości x liczby $\{4; 2x+1; 16\}$ tworzą ciąg arytmetyczny?
39. Dla jakiej wartości x liczby $\{3; 3x+5; 27\}$ tworzą ciąg arytmetyczny?
40. W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, spełniony jest warunek $a_4 = 3a_1$. Wyznacz a_1 i q .
41. W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, spełniony jest warunek $a_5 = 9a_3$. Wyznacz a_1 i q .
42. W malejącym ciągu geometrycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, spełniony jest warunek $4a_7 = a_3$. Wyznacz a_1 i q .
43. W rosnącym ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, spełniony jest warunek $a_4 = -2a_1$ oraz $a_6 = 12$. Wyznacz a_1 i r .
44. W malejącym ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, spełniony jest warunek $a_5 = a_3 - 2\sqrt{2}$ oraz $a_4 = 10 - 3\sqrt{2}$. Wyznacz a_1 i r .
45. Trzy liczby 3,0,-3 są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wzór ogólny.
46. Trzy liczby $2, 2 - 2\sqrt{2}, 2 - 4\sqrt{2}$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wzór ogólny.
47. Niech $a_n = 3n - 2$. Wyznacz a_{n+1} oraz a_{n-1} .
48. Niech $a_n = \frac{3-n}{2^{n-1}}$. Wyznacz a_{n+1} oraz a_{n-1} .
49. Niech $S_n = n^2 + 3n$. Wyznacz a_1, a_2, a_5, a_{14} .
50. Niech $S_n = 3n^2 - 2n$. Wyznacz a_1, a_2, a_5, a_{14} .
51. Niech dany będzie wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $S_n = n^2 + 6n$. Wyznacz wzór ogólny.
52. Niech dany będzie wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $S_n = \frac{1}{3}n^2 - \frac{11}{3}$. Wyznacz wzór ogólny.
53. Oblicz sumę 29 wyrazów ciągu arytmetycznego $a_n = 5n - 7\frac{1}{2}$.
54. Wyznacz ósmy wyraz ciągu $a_n = \frac{(-1)^{n+1} + n}{n^2 - 3n + 1}$.
55. Jaką kwotę będziemy dysponowali po dwóch latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 3000zł. przy oprocentowaniu rocznym 6%, a odsetki kapitalizujemy co pół roku?
56. Jaką kwotę będziemy dysponowali po trzech latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 3000zł. przy oprocentowaniu rocznym 6%, a odsetki kapitalizujemy co pół roku?
57. Trzy liczby, których suma jest równa 6, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do ostatniej z nich dodamy 1, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
58. Wykaż, że ciąg $a_n = \frac{2n-5}{3}$ jest arytmetyczny.
59. Wykaż, że ciąg $a_n = 4^n$ jest geometryczny.
60. Wyznacz wszystkie wartości x i y , dla których liczby $\{x; 2y; x-4\}$ tworzą ciąg arytmetyczny oraz liczby $\{x; 2y; 1\}$ tworzą ciąg geometryczny. Podaj te ciągi.
61. W nieskończonym ciągu arytmetycznym suma trzynastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 148. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego, czwartego i ósmego wynosi 4. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.
62. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych między dodatnią osią OX i prostą, jeśli do prostej należy punkt :
- (a) $P=(-4;5)$
- (b) $P=(7,24)$
- (c) $P=(-\sqrt{3};-2)$
- (d) $P=(6;-8)$
63. Niech α -ostry oraz $tg\alpha = 2\sin\alpha$. Wyznacz $\cos\alpha$.
64. Niech α -ostry oraz $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{tg\alpha}$. Wyznacz $\sin\alpha$.
65. Niech α -stry oraz $tg\alpha = \frac{2}{5}$. Wyznacz wartość wyrażenia $\frac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha}$.
66. Kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Wyznacz wartość wyrażenia $\frac{\cos^2\alpha - tg\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.
67. Kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.

68. Kąt α jest ostry oraz $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.
69. Kąt α jest ostry oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.
70. Kąt α jest rozwarty oraz $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.
71. Kąt α jest rozwarty oraz $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.
72. Kąt α jest rozwarty oraz $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.
73. Wyznacz wartość kąta ostrego α , jeśli $\sin 160^\circ = \cos\alpha$.
74. Wyznacz wartość kąta ostrego α , jeśli $\sin 102^\circ = \cos\alpha$.
75. Wyznacz wartość kąta ostrego α , jeśli $\cos 160^\circ = -\sin\alpha$.
76. Wyznacz wartość kąta ostrego α , jeśli $\cos 103^\circ = -\sin\alpha$.
77. Wyznacz wartość kąta ostrego α , jeśli $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$.
78. Wyznacz wartość kąta ostrego α , jeśli $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$.
79. Wyznacz wartość kąta ostrego α , jeśli $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \sqrt{3}$.
80. Oblicz pole i obwód trapezu prostokątnego o kącie 30° i podstawach długości 12cm i 9cm.
81. Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego o kącie rozwartym 120° i podstawach długości 18cm i 8cm.
82. Oblicz pole trójkąta o bokach długości 3cm i 5cm oraz kącie między nimi 45° .
83. Oblicz pole trójkąta o bokach długości $5\sqrt{3}\text{cm}$ i 9cm oraz kącie między nimi 120° .
84. Wyznacz miarę kąta wpisanego w okrąg o promieniu 12, który jest oparty na łuku długości 6π .
85. Suma miar kątów środkowego i wpisanego opartych na tym samym łuku okręgu wynosi 54° . Wyznacz te kąty.
86. Różnica miar kątów środkowego i wpisanego opartych na tym samym łuku okręgu wynosi 54° . Wyznacz te kąty.
87. Suma miar kątów środkowego i wpisanego opartych na tym samym łuku okręgu wynosi 354° . Wyznacz te kąty.
88. Wyznacz miarę kąta środkowego i wpisanego, jeśli są oparte na łuku długości $\frac{4}{9}$.
89. Pole rombu o obwodzie 8 jest równe 2. Kąt ostry tego rombu ma miarę α . Wyznacz ten kąt.
90. Pole rombu o obwodzie 16 jest równe $\sqrt{3}$. Kąt rozwarty tego rombu ma miarę α . Wyznacz ten kąt.
91. Pole trójkąta o bokach 6 i 8 oraz kącie α między nimi wynosi 24. Wyznacz ten kąt.
92. Pole równoległoboku o bokach 6 i 8 oraz kącie α między nimi wynosi $24\sqrt{3}$. Wyznacz ten kąt.
93. Pole trójkąta o bokach $10\sqrt{2}$ i 8 oraz kącie α między nimi wynosi 40. Wyznacz ten kąt.
94. Niech trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne, a ich pola są odpowiednio równe 50 i 100. Wyznacz skalę podobieństwa mniejszego do większego.
95. Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego o kącie ostrym 60° i ramieniu długości $4\sqrt{3}$.