

# Geometria analityczna.

Zagadnienia szczegółowe: odległość między dwoma punktami; wyznaczanie równania prostej przechodzącej przez dwa punkty; równoległość i prostokątność prostych; wyznaczanie współrzędnych punktu przecięcia się dwóch prostych; wyznaczanie środka odcinka; przykładowe zadania otwarte; zadania różne.

1. Wyznacz równanie prostej AB, jeśli  $A = (2, 3)$  i  $B = (4, 7)$ .
2. Wyznacz równanie prostej AB, jeśli  $A = (\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$  i  $B = (4\sqrt{3}, -8\sqrt{3})$ .
3. Wyznacz równanie prostej AB, jeśli  $A = (1, \frac{1}{3})$  i  $B = (3, 1\frac{2}{3})$ .
4. Wyznacz równanie prostej AB, jeśli  $A = (-4, -7)$  i  $B = (0, -2)$ .
5. Napisz równanie prostej równoległej do prostej  $y=2x$  i przechodzącej przez punkt  $P=(3,-2)$ .
6. Napisz równanie prostej równoległej do prostej  $x=3$  i przechodzącej przez punkt  $P=(4,1)$ .
7. Napisz równanie prostej równoległej do prostej  $y=4$  i przechodzącej przez punkt  $P=(2,-4)$ .
8. Napisz równanie prostej równoległej do prostej  $y=3x-5$  i przechodzącej przez punkt  $P=(-3,5)$ .
9. Napisz równanie prostej równoległej do prostej  $y=-5x+3$  i przechodzącej przez punkt  $P=(3,-2)$ .
10. Napisz równanie prostej równoległej do prostej  $y = -\frac{2}{3}x + 8$  i przechodzącej przez punkt  $P=(9, \frac{1}{3})$ .
11. Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej  $y=2x$  i przechodzącej przez punkt  $P=(4,-2)$ .
12. Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej  $y=-\frac{1}{3}x+32$  i przechodzącej przez punkt  $P=(-1,8)$ .
13. Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej  $y=2$  i przechodzącej przez punkt  $P=(3,-2)$ .
14. Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej  $x=4$  i przechodzącej przez punkt  $P=(6,-4)$ .
15. Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej  $y=\sqrt{3}x-4$  i przechodzącej przez punkt  $P=(4\sqrt{3},5)$ .
16. Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej  $y=-7x-9$  i przechodzącej przez punkt  $P=(4,2)$ .
17. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $D = (-2, 11)$  oraz równoległej do prostej  $y = 3x - 4$ .
18. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $D = (-3, 11)$  oraz równoległej do prostej  $y = 2x + 3$ .
19. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty  $A = (-5, -1)$  oraz  $B = (4, 2)$ .
20. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty  $A = (-1, 3)$  oraz  $B = (5, 1)$ .
21. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $E = (-3, 11)$  oraz prostopadłej do prostej  $y = 3x - 4$ .
22. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $E = (-2, 11)$  oraz prostopadłej do prostej  $y = 2x + 3$ .
23. Punkt S jest środkiem odcinka AB. Wyznacz współrzędne wskazanego punktu.
  - (a)  $A=(-3,6)$ ,  $B=(9,8)$ ,  $S=?$
  - (b)  $A = (-2, 3)$ ,  $B = (5, -4)$ ,  $S=?$
  - (c)  $A = (\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ ,  $B = (3\sqrt{2}, 4\sqrt{3})$ ,  $S=?$
  - (d)  $A = (-2, 3)$ ,  $S = (5, -4)$ ,  $B=?$
  - (e)  $A = (-4, 5)$ ,  $S = (\frac{2}{5}, -\frac{1}{3})$ ,  $B=?$
  - (f)  $A = (3\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ ,  $S = (-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ ,  $B=?$
  - (g)  $S = (-2, 3)$ ,  $B = (5, -4)$ ,  $A=?$
  - (h)  $B = (-2, 3)$ ,  $S = (11, 22)$ ,  $A=?$
  - (i)  $A = (-6 - 2\sqrt{2}; 4 - 2\sqrt{2})$ ,  $B = (2 + 6\sqrt{2}; 6 - 2\sqrt{2})$ ,  $S=?$
24. Wyznacz współrzędne punktu (o ile istnieje) przecięcia się prostych  $y=2x+3$  i  $y=-3x+8$ .
25. Wyznacz współrzędne punktu (o ile istnieje) przecięcia się prostych  $-3x+7y=27$  i  $2x+5y=11$ .
26. Wyznacz współrzędne punktu (o ile istnieje) przecięcia się prostych  $10x+7y+2=0$  i  $-15x+14y+11=0$ .
27. Wyznacz współrzędne punktu (o ile istnieje) przecięcia się prostych  $2x-3y+5=0$  i  $2x-3y+1=0$ .
28. Wyznacz współrzędne punktu (o ile istnieje) przecięcia się prostych  $y+4x=1$  i  $4x=1-y$ .
29. Wyznacz współrzędne punktu (o ile istnieje) przecięcia się prostych  $2x-y-3=0$  i  $y=2x-3$ .
30. Jeżeli do licznika i do mianownika nieskracalnego dodatniego ułamka dodamy połowę jego licznika, to otrzymamy  $\frac{4}{7}$ , a jeśli do licznika i mianownika dodamy 1, to otrzymamy  $\frac{1}{2}$ . Wyznacz ten ułamek.

31. Wyznacz wartość parametru  $m$ , dla którego funkcja  $f(x) = (2m - 4)x + 2$  jest malejąca.
32. Wyznacz wartość parametru  $m$ , dla którego funkcja  $f(x) = (3m - 4)x + 2$  jest rosnąca.
33. Wyznacz wartość parametru  $m$ , dla którego funkcja  $f(x) = (2m - 5)x + 2$  jest stała.
34. O funkcji liniowej  $f$  wiadomo, że  $f(1) = 2$ . Do jej wykresu należy punkt  $P = (-2; 3)$ . Wyznacz wzór tej funkcji.
35. O funkcji liniowej  $f$  wiadomo, że  $f(3) = -6$ . Do jej wykresu należy punkt  $P = (-3; -8)$ . Wyznacz wzór tej funkcji.
36. O funkcji liniowej  $f$  wiadomo, że  $f(-5) = 5$ . Do jej wykresu należy punkt  $P = (5; -5)$ . Wyznacz wzór tej funkcji.
37. Funkcja liniowa  $f$  określona wzorem  $f(x) = 2x + b$  ma takie samo miejsce zerowe, jakie ma funkcja liniowa  $g(x) = -3x + 4$ . Wyznacz  $b$ .
38. Funkcja liniowa  $f$  określona wzorem  $f(x) = ax - 2\frac{2}{3}$  ma takie samo miejsce zerowe, jakie ma funkcja liniowa  $g(x) = -3x + 4$ . Wyznacz  $a$ .
39. Funkcja liniowa  $f$  określona wzorem  $f(x) = -2x + b$  ma takie samo miejsce zerowe, jakie ma funkcja liniowa  $g(x) = -3x + 9$ . Wyznacz  $b$ .
40. Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji  $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$  w przedziale  $\langle 0; 9 \rangle$ .
41. Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji  $f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$  w przedziale  $\langle -12; 4 \rangle$ .
42. Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji  $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$  w przedziale  $\langle -1; 2 \rangle$ .
43. Niech  $f(x) = 3x - 5$ . Podaj miejsce zerowe funkcji  $g(x) = f(x - 3)$ .
44. Niech  $f(x) = -3x + 5$ . Podaj miejsce zerowe funkcji  $g(x) = f(x + 4)$ .
45. Niech  $f(x) = 3x - 5$ . Podaj miejsce zerowe funkcji  $g(x) = f(x - 3) + 6$ .
46. Niech  $f(x) = 4x - 2$ . Podaj miejsce zerowe funkcji  $g(x) = f(x + 2) - 3$ .
47. Proste o równaniach  $y = 2mx - m^2 - 1$  oraz  $y = 4m^2x + m^2 + 1$  są prostopadłe. Wyznacz  $m$ .
48. Proste o równaniach  $y = mx + 3$  oraz  $y = (4m - 4)x + m^2 + 1$  są równoległe. Wyznacz  $m$ .
49. Proste o równaniach  $y = -mx + 3$  oraz  $y = 3mx - 5x - 3$  są równoległe. Wyznacz  $m$ .
50. Punkt  $C = (0, 2)$  jest wierzchołkiem trapezu ABCD, którego podstawa AB jest zawarta w prostej o równaniu  $y = 2x - 4$ . Wyznacz równanie prostej zawierającej podstawę CD.
51. Punkt  $C = (1, 3)$  jest wierzchołkiem kwadratu ABCD, którego bok AB jest zawarty w prostej o równaniu  $y = 3x - 5$ . Wyznacz równanie prostej zawierającej bok CB.
52. W układzie współrzędnych są dane punkty  $A = (-43; -12)$ ,  $B = (50; 19)$ . Prosta AB przecina oś OX w punkcie P. Oblicz pierwszą współrzędną punktu P.
53. W układzie współrzędnych są dane punkty  $A = (-42; -11)$ ,  $B = (51; 20)$ . Prosta AB przecina oś OY w punkcie P. Oblicz drugą współrzędną punktu P.
54. Okrąg o środku  $S = (3, 7)$  jest styczny do prostej o równaniu  $y = 2x - 3$ . Oblicz współrzędne punktu styczności.
55. Okrąg o środku  $S = (-7, 3)$  jest styczny do prostej o równaniu  $y = -3x + 4$ . Oblicz współrzędne punktu styczności.
56. Do równania  $2x - 3y = 5$  dopisz drugie tak, aby otrzymać układ równań: sprzeczny; nieoznaczony; oznaczony.
57. Do równania  $-7x = 8y - 5$  dopisz drugie tak, aby otrzymać układ równań: sprzeczny; nieoznaczony; oznaczony.
58. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $C = (2, -1)$ , która jest równoległa do prostej AB, jeśli  $A = (-1, 3)$  i  $B = (3, -5)$ .
59. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $C = (2, -1)$ , która jest równoległa do prostej AB, jeśli  $A = (4, -20)$  i  $B = (6, 80)$ .
60. Napisz równanie symetralnej odcinka AB, jeśli  $A = (3, 1)$  i  $B = (-1, 7)$ .
61. Napisz równanie symetralnej odcinka AB, jeśli  $A = (2, -1)$  i  $B = (4, -5)$ .
62. Napisz równanie symetralnej odcinka AB, jeśli  $A = (-3, -2)$  i  $B = (1, -4)$ .
63. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się symetralnych odcinków AB i CD, gdy  $A = (-1, 3)$ ,  $B = (3, 3)$ ,  $C = (-2, 0)$ ,  $D = (-2, 6)$ .
64. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się symetralnych odcinków AB i CD, gdy  $A = (-3, 4)$ ,  $B = (1, -4)$ ,  $C = (4, 0)$ ,  $D = (0, -2)$ .
65. Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny, jeśli  $A = (2, 1)$ ,  $B = (1, 5)$ ,  $C = (-7, 3)$ .
66. Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny, jeśli  $A = (5, 0)$ ,  $B = (1, 8)$ ,  $C = (-5, 5)$ .
67. Napisz równania prostych zawierających wysokości trójkąta ABC, jeśli  $A = (1, 1)$ ,  $B = (6, 1)$ ,  $C = (1, 3)$ .

68. Napisz równania prostych zawierających wysokości trójkąta ABC, jeśli  $A=(1,2)$ ,  $B=(-1,0)$ ,  $C=(2,-2)$ .
69. Oblicz długości środkowych trójkąta o wierzchołkach  $A=(2,1)$ ,  $B=(-2,3)$ ,  $C=(0,3)$ .
70. Oblicz długość wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C na bok AB oraz pole tego trójkąta, jeśli  $A=(-6,-4)$ ,  $B=(2,8)$ ,  $C=(4,-8)$ .
71. Oblicz długość wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C na bok AB oraz pole tego trójkąta, jeśli  $A=(4,2)$ ,  $B=(-2,-4)$ ,  $C=(6,-4)$ .
72. Punkty  $M=(-1,3)$  i  $N=(4,-2)$  są wierzchołkami kwadratu. Oblicz obwód i pole kwadratu. Rozpatrz różne przypadki.
73. Punkty  $A=(-4,2)$ ,  $B=(3,3)$ ,  $C=(9,-4)$  są trzema kolejnymi wierzchołkami równoległoboku ABCD.
- wyznacz współrzędne punktu D
  - wyznacz współrzędne punktu K przecięcia się przekątnych równoległoboku
  - napisz równania prostych zawierających przekątne równoległoboku
74. Punkty  $A=(2;11)$ ,  $B=(8;23)$ ,  $C=(6;14)$  są wierzchołkami trójkąta. Wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D. Wyznacz współrzędne punktu D.
75. Punkty  $A=(-1;-2)$ ,  $B=(7;2)$ ,  $C=(2;4)$  są wierzchołkami trójkąta. Wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D. Wyznacz współrzędne punktu D.
76. Punkty  $A=(5,5)$  i  $B=(11,3)$  są wierzchołkami trójkąta ABC, a punkt  $M=(3,8)$  jest środkiem boku AC. Oblicz współrzędne punktu przecięcia prostej AB z wysokością tego trójkąta, poprowadzoną z wierzchołka C.
77. Punkty  $A=(0,0)$  i  $B=(6,-2)$  są wierzchołkami trójkąta ABC, a punkt  $M=(-2,3)$  jest środkiem boku AC. Oblicz współrzędne punktu przecięcia prostej AB z wysokością tego trójkąta, poprowadzoną z wierzchołka C.
78. Wierzchołki trójkąta mają współrzędne  $A=(-1,-1)$ ,  $B=(11,3)$ ,  $C=(7,5)$ . Symetralna odcinka AC przecina prostą BC w punkcie D. Wyznacz współrzędne punktu D.
79. Punkty  $E=(8,2)$  i  $F=(10,8)$  to środki boków, odpowiednio AB i BC kwadratu ABCD. Oblicz przekątną, pole i obwód tego kwadratu.
80. Punkty  $E=(-1,-7)$  i  $F=(1,-1)$  to środki boków, odpowiednio AB i BC kwadratu ABCD. Oblicz przekątną, pole i obwód tego kwadratu.
81. Dane są wierzchołki trójkąta ABC:  $A=(3,3)$ ,  $B=(10,6)$ ,  $C=(4,10)$ . Z wierzchołka C poprowadzono wysokość tego trójkąta, która przecina bok AB w punkcie D. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt D i równoległej do boku BC.
82. Dane są wierzchołki trójkąta ABC:  $A=(-1,-1)$ ,  $B=(6,2)$ ,  $C=(0,6)$ . Z wierzchołka C poprowadzono wysokość tego trójkąta, która przecina bok AB w punkcie D. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt D i równoległej do boku BC.
83. Wyznacz równanie prostej, która przechodzi przez punkt  $A=(2,4)$  i jest równo oddalona od punktów  $B=(-1,1)$  i  $C=(3,-1)$ . Rozważ dwa przypadki.
84. Punkty  $A=(7,2)$ ,  $B=(4,6)$ ,  $C=(3,2)$  są wierzchołkami trapezu ABCD o podstawach AB i CD. Wyznacz współrzędne wierzchołka D, jeśli wiadomo, że przekątne trapezu są prostopadłe.
85. Zbadaj, jakim wielokątem jest czworokąt ABCD, i oblicz jego pole, jeśli  $A=(-6,1)$ ,  $B=(2,-1)$ ,  $C=(3,3)$ ,  $D=(-1,4)$ .
86. Na prostej o równaniu  $y=2x-4$  wyznacz punkt leżący najbliżej punktu  $P=(4,-2)$ .
87. Wyznacz współrzędne końców odcinka AB, jeśli wiadomo, że punkty  $P=(1,10)$  i  $Q=(4,6)$  dzielą ten odcinek na trzy równe części.
88. Dane są punkty  $M=(-3,4)$  oraz  $N=(-2,6)$ . Punkt K jest środkiem odcinka MN. Wyznacz współrzędne punktu  $K'$  w symetrii względem początku układu współrzędnych.
89. Dane są punkty  $M = (-4\sqrt{2}, 5\sqrt{3})$  oraz  $N = (-3\sqrt{2}, 7\sqrt{3})$ . Punkt K jest środkiem odcinka MN. Wyznacz współrzędne punktu  $K'$  w symetrii względem osi OX.
90. Dane są punkty  $M = (-6\sqrt{5}, 4)$  oraz  $N = (-2, 6\sqrt{7})$ . Punkt K jest środkiem odcinka MN. Wyznacz współrzędne punktu  $K'$  w symetrii względem osi OY.
91. Dany jest okrąg o środku  $S=(-6;-8)$  i promieniu 2016. Obrazem tego okręgu w symetrii osiowej względem osi OY jest okrąg o środku w punkcie  $S_1$ . Oblicz odległość między punktami S i  $S_1$ .
92. Dany jest okrąg o środku  $S=(-6;-8)$  i promieniu 2016. Obrazem tego okręgu w symetrii osiowej względem osi OX jest okrąg o środku w punkcie  $S_1$ . Oblicz odległość między punktami S i  $S_1$ .
93. Dany jest okrąg o środku  $S=(-6;-8)$  i promieniu 2016. Obrazem tego okręgu w symetrii osiowej względem początku układu współrzędnych jest okrąg o środku w punkcie  $S_1$ . Oblicz odległość między punktami S i  $S_1$ .
94. Na płaszczyźnie dane są punkty:  $A = (1; -\sqrt{6})$ ,  $B = (1 + 4\sqrt{3}; -\sqrt{6})$ ,  $C = (1; -\sqrt{6} + 4)$ . Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

95. Punkty  $A=(3,3)$  i  $B=(9,1)$  są wierzchołkami trójkąta  $ABC$ , a punkt  $M=(1,6)$  jest środkiem boku  $AC$ . Oblicz współrzędne punktu przecięcia prostej  $AB$  z wysokością tego trójkąta, poprowadzoną z wierzchołka  $C$ .
96. Punkty  $A=(4,4)$  i  $B=(10,2)$  są wierzchołkami trójkąta  $ABC$ , a punkt  $M=(2,7)$  jest środkiem boku  $AC$ . Oblicz współrzędne punktu przecięcia prostej  $AB$  z wysokością tego trójkąta, poprowadzoną z wierzchołka  $C$ .