

Liczby rzeczywiste, wyrażenia algebraiczne, równania i nierówności, statystyka, prawdopodobieństwo.

Zagadnienia szczegółowe: obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych; działania na pierwiastkach i potęgach; definicja logarytmu; działania na logarytmach; błąd bezwzględny i błąd względny; działania na przedziałach liczbowych; obliczenia procentowe; wzory skróconego mnożenia; własności liczb naturalnych, elementy statystyki opisowej, obliczanie prawdopodobieństwa.

- Zaznacz na osi podany przedział. Zapisz zbiór będący rozwiązaniem nierówności:
 - $3 \leq x < 11$
 - $-4 \leq x - 1 \leq 4$
 - $-2 < x + 3 < 6$
- Liczba 0,9 jest jednym z przybliżeń liczby $\frac{7}{8}$. Oblicz błąd bezwzględny i względny tego przybliżenia. Błąd względny podaj w procentach.
- Liczba 15 jest jednym z przybliżeń liczby 15,24. Oblicz błąd bezwzględny i względny tego przybliżenia. Błąd względny podaj w procentach.
- Liczba 23 jest przybliżeniem z niedomiarem liczby x . Błąd bezwzględny tego przybliżenia jest równy 0,37. Wyznacz x . Oblicz błąd względny. Wynik podaj w procentach.
- Liczba 108 jest przybliżeniem z nadmiarem liczby x . Błąd bezwzględny tego przybliżenia jest równy 3. Wyznacz x . Oblicz błąd względny. Wynik podaj w procentach.
- Cena towaru została podwyższona o 40 procent, po pewnym czasie ponownie podwyższono, tym razem o 20 procent. O ile procent wyjściowa cena się zmieniła?
- Cena towaru została obniżona o 30 procent, po pewnym czasie ponownie obniżono, tym razem o 20 procent. O ile procent wyjściowa cena się zmieniła?
- Jeden bok kwadratu zwiększono o 15 procent a drugi zmniejszono o 5 procent. O ile procent zmieniło się pole tego kwadratu?
- Boki trójkąta równobocznego zwiększono o 25 procent. Jak zmieniło się jego pole i obwód?
- W klasie jest pięć razy więcej chłopców niż dziewcząt. Ile procent wszystkich uczniów tej klasy stanowią dziewczęta?
- Oblicz: ile procent liczby 8 stanowi 20% liczby 15
- Oblicz 25% liczby 2^{48} ;
- Oblicz o ile procent liczba 15 jest większa od liczby 12;
- Oblicz o ile procent liczba 12 jest mniejsza od liczby 15;
- Oblicz o ile procent liczba 80 jest większa od liczby 50;
- Oblicz o ile procent liczba 50 jest mniejsza od 80
- Porównaj liczby a i b , wiedząc, że: 20% liczby a jest równe 4, a 30% liczby b wynosi 6,3;
- Porównaj liczby a i b , wiedząc, że: 8% liczby a jest równe 2,56 oraz 12% liczby b wynosi 3,36;
- Liczba 78 jest o 50% większa od liczby c . Oblicz c .
- Liczba 78 jest o 50% mniejsza od liczby c . Oblicz c .
- Oblicz, wykonaj działania:
 - $(2\sqrt{7} - 1)^2 = ;$
 - $(3\sqrt{2} + 4)^2 = ;$
 - $(5 - 3x)(5 + 3x) = ;$
 - $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = ;$
 - $(\frac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{5}})^2 = ;$
 - $(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3})^2 = ;$
 - $(2x + 2 + y)^2 = ;$
 - $25 - (2x - 3)^2 = ;$
 - $(2x - 1)(2 - 3x) = ;$
 - $27^{\frac{1}{3}} = ;$
 - $81^{-\frac{3}{4}} = ;$
 - $125^{\frac{4}{3}} = ;$

- $4^8 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 = ;$
- $\frac{2^{15} \cdot 27^5}{6^{15}} = ;$
- $(-a - 1)^2 = ;$
- $(a^2 - 2a)^2 = ;$
- $(a + b - 1)^2 = ;$
- $|5 - 2\sqrt{2}| = ;$
- $|2 - \sqrt{5}| = ;$
- $|3 - \pi| = ;$
- $|1 - |1 - \sqrt{2}|| = ;$
- $|\sqrt{5} - \sqrt{3} - 1| = ;$
- $|3 - \sqrt{2}| - |\sqrt{2} - 3| =$

22. Oblicz wartość wyrażenia W dla argumentu 2 i -3, jeśli:

- $W = 2x + 1 ;$
- $W = \frac{2}{3}x - 7 ;$
- $W = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3} ;$
- $W = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 ;$
- $W = (2x^2 - 1)(2 - 5x) ;$
- $W = -2x^2 + 5x - 1 ;$
- $W = 5^{2x-3} + 9 ;$
- $W = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} - \frac{1}{5} ;$
- $W = x^2 ; W = -x^2 ; W = (-x)^2$

23. Zapisz liczbę o podstawie 3 oraz 9.

- $3^{\frac{9}{4}} ;$
- $27^2 \cdot 9^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$

24. Zapisz liczbę w postaci potęgi liczby 2.

- $32^{\frac{2}{5}} = ;$
- $2^{-2} \cdot 4^5 \cdot 8^{-3} = ;$
- $8^{4^2} \cdot 4^{2^4} = ;$
- $2^7 + 2^7 = ;$
- $3 \cdot 4^5 + 2^{10} = ;$
- $10 \cdot 2^2 + 2^3 + 2^4 = ;$
- $6 \cdot 2^{12} + 9 \cdot 2^{13} + 5 \cdot 2^{15} = ;$
- $2^{100} + 2^{100} + 2^{100} + 2^{100} =$

25. Zapisz liczbę w postaci potęgi liczby 3.

- $3^{21} \cdot 9^4 = ;$
- $9^3 \cdot 27^2 = ;$
- $6^{-4} : 2^{-4} = ;$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 9^{-1} \cdot 81^{-1} = ;$
- $4 \cdot 9^6 - 3^{12} = ;$
- $3^4 + 3^4 + 3^4 =$

26. Wyznacz wartość wyrażenia $\frac{|x+4|-x+4}{x}$, jeśli:

- $x = -4$
- $x = -\sqrt{17}$
- $-4 < x < 0$
- $x > 0$
- $x = 4$

27. Wykaż, że podane liczby są przeciwne:

- $2 + \sqrt{5}$ i $\frac{1}{2-\sqrt{5}} ;$

- $\sqrt{2} - \sqrt{3} i \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$;
- $3 + \sqrt{2} i \frac{7}{\sqrt{2}-3}$

28. Zapisz liczbę w notacji wykładniczej:

- 123;
- 78000;
- 0,005;
- 56,98;
- $0,74 \cdot 10^8$;
- $123,876 \cdot 10^{-5}$;
- $5 \cdot 10^{10} + 4 \cdot 10^8$;
- $2,92 \cdot 10^{14} + 9,4 \cdot 10^{12}$;
- $\frac{3 \cdot 10^{19}}{20 \cdot 10^4}$

29. Wyznacz sumę, iloczyn, różnicę zbiorów A i B, jeśli:

- $A = (2, 6)$ i $B = [-2, 8)$;
- $A = (-3, 4]$ i $B = [-2, 6]$;
- $A = (-\infty, 2)$ i $B = [-3, 5)$;
- $A = [-4, \infty)$ i $B = (1, \infty)$.

30. Zapisz podaną liczbę w najprostrzej postaci:

- $\sqrt{72} + \sqrt{18} - \sqrt{162} =$;
- $\sqrt{12} + 3\sqrt{75} - \sqrt{300} =$;
- $\frac{8+2\sqrt{2}}{4+\sqrt{128}} =$;
- $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2} =$;
- $\frac{4\sqrt{45}-2\sqrt{20}}{\sqrt{5}} =$

31. Oblicz:

- $2^{\log_2 5} =$;
- $3^{2\log_3 4} =$;
- $5^{2+\log_5 4} =$;
- $7^{2-3\log_7 1} =$;
- $4^{\log_2 5 + \log_2 3} =$;
- $\log_6 2 + \log_6 18 =$;
- $\log_3 4 + \log_3 \frac{3}{4} =$;
- $\log_2 20 - \log_2 10 =$;
- $\log_{\frac{1}{6}} 42 - \log_{\frac{1}{6}} 7 =$;
- $\log 8 - 3\log 2 =$;
- $2\log_{\sqrt{3}} 27 + 6\log \sqrt{10} =$;
- $\log_4 8 - \log_4 12 + \log_4 3 =$;
- $\log_3 18 + \log_3 5 - \log_3 10 =$;
- $\frac{1}{3}\log_2 3 + \frac{1}{3}\log_2 9 - \log_2 6 =$;
- $\log_2(\log_2 \sqrt[4]{2}) =$;
- $\log_2(\log_2 9) =$;
- $\log_{27}(\log_2 \sqrt[3]{2}) =$;
- $3\log_{27}(\log_{0,10} 0,001) =$
- $\log_8 16 + 1 =$

32. Dane są liczby $a = \log_2 32$, $b = \log_{64} \frac{1}{4}$. Oblicz iloczyn, iloraz, sumę, różnicę liczb a i b .

33. Czy liczba $2\log_9 2$ spełnia równanie $4^x = 9$?

34. Czy liczba $2\log_4 3$ spełnia równanie $4^x = 9$?

35. Wyznacz połowę sumy: $4^{28} + 4^{28} + 4^{28} + 4^{28}$.

36. Wyznacz trzecią część sumy: $9^{2016} + 9^{2016} + 9^{2016}$
37. Wykaż, że wartość wyrażenia $(x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + x) - 4(1 + \frac{1}{4}x^2)$ nie zależy od wartości zmiennej x .
38. Wykaż, że jeżeli $ab > 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
39. Wykaż, że jeżeli $ab < 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.
40. Podaj ogólną postać liczby naturalnej:
- parzystej;
 - nieparzystej;
 - podzielnej przez 3;
 - której reszta z dzielenia przez 3 jest równa 2;
 - której reszta z dzielenia przez 7 jest równa 4;
 - która jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych;
 - która jest iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych nieparzystych;
 - która jest kwadratem liczby naturalnej;
 - która jest sumą kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych.
41. Jaką cyfrą można zastąpić x , aby liczba $123x$ (zapis dziesiętny) była podzielna przez 3; 4; 5; 6; 9.
42. Uzasadnij, że
- (a) liczba $2 \cdot 5^7 + 3 \cdot 5^6 + 3 \cdot 5^5$ jest parzysta
 - (b) liczba $3^5 - 3^4 + 3^3$ jest podzielna przez 21
 - (c) liczba $5^{2012} + 5^{2013} + 5^{2014}$ jest podzielna przez 31
 - (d) liczba $2^{100} + 2^{101} + 2^{102}$ jest podzielna przez 14
 - (e) liczba $3^{12} + 9^7 + 27^5$ jest podzielna przez 37
 - (f) liczba $4^9 + 4^8 + 4^7$ jest podzielna przez $2^7 - 2^6 - 2^4$
 - (g) liczba $2^n + 2^{n+2}$ jest podzielna przez 5 dla dowolnej liczby n -naturalnej
 - (h) liczba $2^n + 2^{n+1}$ jest podzielna przez 3 dla dowolnej liczby n -naturalnej
 - (i) suma dwóch kolejnych parzystych liczb naturalnych jest parzysta
 - (j) suma dwóch kolejnych nieparzystych liczb naturalnych jest podzielna przez 4
 - (k) suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3
 - (l) suma trzech kolejnych parzystych liczb naturalnych jest podzielna przez 6
 - (m) suma trzech kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 3 jest podzielna przez 9
 - (n) suma trzech kolejnych naturalnych potęg liczby 3 jest podzielna przez 13
 - (o) kwadrat nieparzystej liczby naturalnej jest nieparzysty
 - (p) kwadrat parzystej liczby naturalnej jest podzielny przez 4
 - (q) kwadrat nieparzystej liczby naturalnej pomniejszony o 1 jest podzielny przez 8
 - (r) różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest nieparzysta
 - (s) różnica kwadratów dwóch kolejnych nieparzystych liczb naturalnych jest podzielna przez 8
 - (t) iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych jest parzysty
 - (u) iloczyn dwóch kolejnych parzystych liczb naturalnych jest podzielny przez 8
 - (v) iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6
 - (w) liczba $\frac{9^{18} - 7^{18}}{9^9 + 7^9}$ jest naturalna
 - (x) liczba $(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})^2$ jest całkowita
 - (y) jeżeli liczba całkowita nie dzieli się przez 3, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1
43. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n reszta z dzielenia kwadratu liczby postaci $2n+3$ przez 8 jest równa 1.
44. Wykaż, że różnica liczby trzycyfrowej i liczby trzycyfrowej o tych samych cyfrach, ale zapisanych w odwrotnej kolejności, jest podzielna przez 3.
45. Udowodnij, że każda liczba całkowita k , która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma taką własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.
46. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$
47. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $9x^2 - 18xy + 10y^2 \geq 0$

48. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $-x^2 - 6x - 9 \leq 0$
49. Średnia arytmetyczna zestawu danych: 2,4,7,8,9 jest taka sama jak średnia arytmetyczna zestawu danych: 2,4,7,8,9,x. Wyznacz x .
50. Średnia arytmetyczna zestawu danych: 2,4,7,8,9,10 jest taka sama jak średnia arytmetyczna zestawu danych: 2,4,7,8,9,x. Wyznacz x .
51. Średnia arytmetyczna zestawu danych: 3,8,3,10,4,10,3,x jest równa 6. Oblicz medianę i odchylenie standardowe.
52. W każdym z trzech pojemników znajduje się para kul, z których jedna jest czerwona, a druga niebieska. Z każdego pojemnika losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwie z trzech wylosowanych kul będą czerwone.
53. W każdym z trzech pojemników znajduje się para kul, z których jedna jest czerwona, a druga niebieska. Z każdego pojemnika losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że kule będą tego samego koloru.
54. W każdym z trzech pojemników znajduje się para ponumerowanych kul, z których jedna ma numer 1, a druga 3. Z każdego pojemnika losujemy jedną kulę i układamy w liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy liczbę podzielną przez 3.
55. W każdym z trzech pojemników znajduje się para ponumerowanych kul, z których jedna ma numer 5, a druga 4. Z każdego pojemnika losujemy jedną kulę i układamy w liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy liczbę podzielną przez 4 lub 5.
56. Wśród 200 osób przeprowadzono badania ankietowe, związane z zakupami w pewnym kiosku. Bilety ulgowe kupiła $\frac{1}{5}$ ankietowanych, bilety normalne $\frac{3}{10}$ ankietowanych. $\frac{1}{4}$ zakupiła oba rodzaje biletów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowa wybrana osoba spośród ankietowanych nie kupiła żadnego biletu.
57. Rzucamy sześć razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech p_i oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia i oczek w i -tym rzucie. Wyznacz p_1, p_3, p_6 .
58. Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek mniejszej od 7.
59. Niech A -zdarzenie losowe, A' -zdarzenie przeciwne do A oraz $P(A) = 2P(A')$. Wyznacz $P(A)$.
60. Niech A -zdarzenie losowe, A' -zdarzenie przeciwne do A oraz $P(A') - P(A) = \frac{1}{2}$. Wyznacz $P(A)$.
61. Na ile sposobów można wybrać dwóch graczy spośród 10 zawodników?
62. Na ile sposobów można wybrać trzech graczy spośród 10 zawodników?
63. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6.
64. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6.